C O N T I N U E   M E D I A

Dr. N.J. Vlaar

Vening Meinesz Laboratorium
Lucas Bolwerk 6 en 7
Utrecht.

1. Inleiding

De klassieke mechanica betreft de statica en dynamica van systemen van puntmassa's en starre lichamen. Een natuurlijke uitbreiding is de continuummechanica. Deze betreft de statica, dynamica en kinematica van vaste, vervormbare stoffen en vloeistoffen.
In een star lichaam vindt geen beweging van massadeeltjes t.o.v. elkaar plaats. In deformeerbare media kunnen de deeltjes t.o.v. elkaar bewegen en zijn de onderlinge afstanden tussen de deeltjes variabel. De materie wordt in de continuummechanica verondersteld continu verdeeld te zijn, m.a.w. we beschouwen de materie niet als opgebouwd uit elementaire discrete deeltjes zoals atomen.
Behalve de wetten van de klassieke mechanica die geldig blijven, bevat de continuummechanica het nieuwe aspect van de vervormbaarheid. Iedere stof, zelfs iedere vaste stof, is vervormbaar onder inwerking van aangrijpende krachten. Indien we dit bij een vast lichaam verwaarlozen, hebben we te maken met een geidealiseerd star lichaam.
De wetten die hun geldigheid behouden, zijn de wetten van Newton en die van behoud van impuls, impulsmoment, energie en massa.
De hoofdopgave van de continuummechanica is te onderzoeken welke relaties bestaan tussen aangrijpende krachten en de daaruit resulterende spanningen enerzijds en de hieruit voortvloeiende deformatie anderzijds.
Op grond van een fenomenologische benadering kan dit wiskundig geformuleerd worden. Hiertoe moet een keuze gemaakt worden uit een aantal wiskundige modellen die het werkelijke gedrag van de materie binnen zekere grenzen van nauwkeurigheid beschrijven. Uit de wiskundige formulering kunnen dan analytisch verdergaande conclusies getrokken worden.
We gaan ons in het volgende bezighouden met optredende spanningen en de daaruit resulterende deformatie en vloei-eigenschappen van zowel vaste stoffen als vloeistoffen (en gassen). Bij de vaste stoffen onderscheiden we elastisch en anelastisch gedrag en bij de vloeistoffen visceuze en wrijvingsloze.

2. Spanning (stress)

2.1. De spanning in een punt

Indien er krachten op een lichaam inwerken, ontstaan binnen het lichaam spanningen. Uitwendige krachten die op kunnen treden, zijn:

(1) Krachten die aangrijpen op de massa binnen het volume van het lichaam, o.a. zwaartekracht en traagheidskrachten.

(2) Tracties die aangrijpen op het oppervlak dat de begrenzing vormt van (een deel van) het lichaam.

De spanningstoestand in een punt P binnen het lichaam is bepaald door de normaalvector $\hat{n}$ op een oppervlakte-elementje dS door P en de tractie $\bar{\sigma}_n$, die in P op dS aangrijpt (zie fig. 2.1).

. . . . .

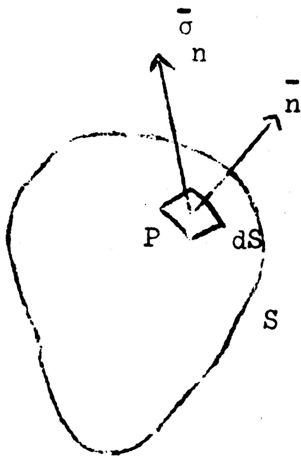


fig. 2.1

In een cartesisch coördinatenstelsel geldt:

$\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$\bar{\sigma}_n = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3})$

Voor het beschrijven van de spanningstoestand in P maken we gebruik van de <u>spanningstensor</u> σ_{ij} (i,j=1,2,3), waarbij σ_{ij} de j-de component is van de spanningsvector, die werkt op een vlak door P met normaal in de i-de richting (zie fig. 2.2)

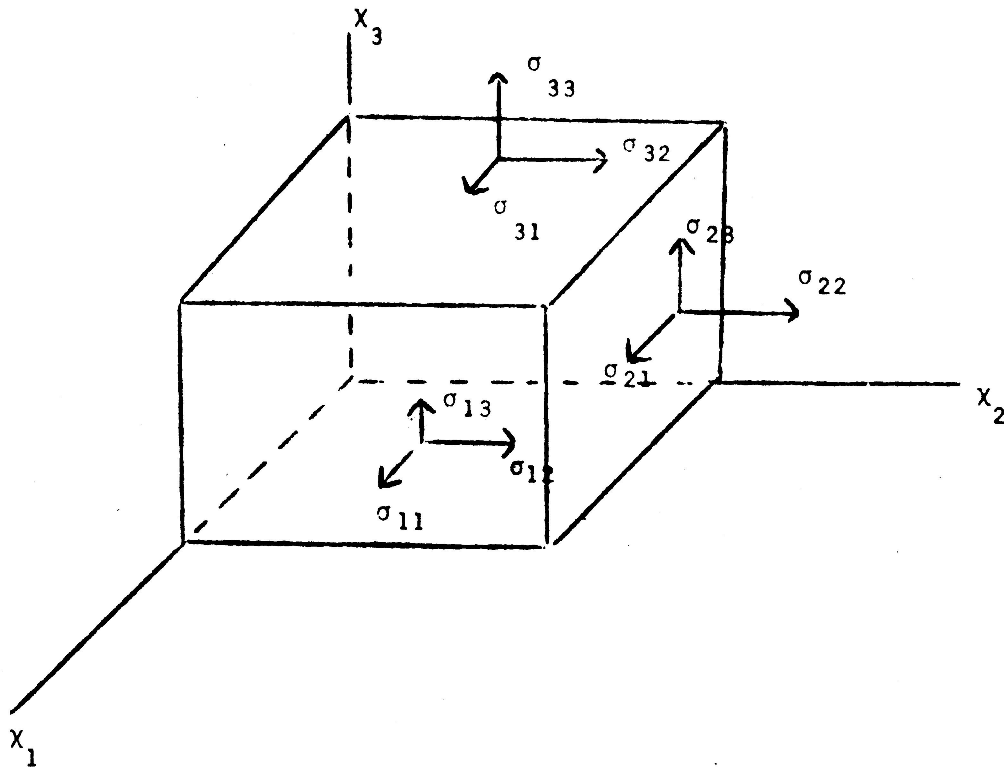


fig. 2.2

σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} heten <u>normaalspanningen</u>

σ_{12}, σ_{13}, σ_{32} etc. heten <u>schuifspanningen</u>

De dimensie van spanning is $\frac{\text{kracht}}{\text{oppervlak}} = \frac{m}{lt^2}$

.....

2.2. De spanningstensor σ_{ij} ondergaat transformatie bij transformatie van cartesische coördinaten. Tussen de oude en de nieuwe basis bestaat de relatie

$$x'_i = l_{pi}\, x_p$$

waarbij l_{pi} de richtingscosinus is van de hoek tussen de p-richting in het oude stelsel en de i-richting in het nieuwe stelsel. De overeenkomstige transformatie van de spanningstensor is dan gegeven door

$$\sigma'_{ij} = l_{pi}\, l_{qj}\, \sigma_{pq}$$

hetgeen de transformatie-eigenschap van een tweedeorde tensor in het algemeen voorstelt.

2.3. De krachten die werken op een deelvolume V met oppervlak S van het continuum zijn de op V aangrijpende krachten (inclusief traagheidskrachten) $\bar{F}$ en de tractie $\bar{\sigma}_n$ op het oppervlak S. In de evenwichtstoestand moet het totaal der werkende krachten nul zijn:

$$\int_V \bar{F}\, dV + \int_S \bar{\sigma}_n\, dS = 0$$

Hieruit wordt de evenwichtsvergelijking voor krachten afgeleid:

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

Ook voor optredende momenten t.o.v. een willekeurig punt (de oorsprong van het coördinaatstelsel) moet evenwicht bestaan:

$$\int_V (\bar{x} \times \bar{F})\, dV + \int_S (\bar{x} \times \bar{\sigma}_n)\, dS = 0$$

Hieruit is af te leiden dat de spanningstensor symmetrisch is:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

2.4. Evenals iedere andere symmetrische tensor van de tweede orde, kan σ_{ij} op <u>hoofdassen</u> gediagonaliseerd worden. De diagonaalelementen van de gediagonaliseerde spanningstensor heten <u>hoofdspanningen</u>. De hoofdspanningstensor is:

. . . . .

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

dus $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$, $\sigma_{33} = \sigma_3$ en $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ in een punt voor een coördinatensysteem langs de hoofdassen. In een vlak loodrecht op een hoofdspanningsrichting treedt geen schuifspanning op.

De hoofdspanningen en -richtingen kunnen gevonden worden door oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

waarbij σ_{ij} de spanningstensor in een cartesisch systeem en $\bar{n} = (n_1,n_2,n_3)$ een hoofdspanningsrichting is.

Het spoor van de tensor is invariant bij coördinaattransformatie:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

geldt voor ieder coördinaat-systeem.

2.5. Indien $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ heerst de hydrostatische toestand met alzijdige druk p.
De spanningstensor is isotroop d.w.z. bij coördinaattransformatie blijft hij gelijk, zodat de hoofdrichtingen willekeurig te kiezen zijn. De spanningstensor is dan $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Op elk vlak door een punt P werkt alleen de normaaldruk (of -rek) p.

2.6. De spanningstensor is te schrijven als de som van een isotrope tensor met diagonaalelementen $\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ en de deviatorische spanningstensor σ'_{ij} waarbij $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\,\delta_{ij}$

Vatten we de isotrope tensor $-\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ op als de gemiddelde hydrostatische druk, dan geeft de deviator de afwijking van de hydrostatische toestand.

. . . . .

De spanningsdeviator uitgeschreven is:

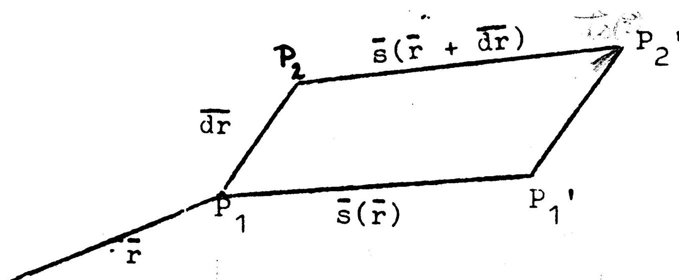
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

De som der diagonaalelementen van de deviator is nul.

3. Deformatie (strain)

3.1. Indien er krachten en spanningen op een lichaam werken, wordt dit gedeformeerd.
V rschillende materiële punten P_1 en P_2 binnen een lichaam zullen voor en na deformatie een andere positie innemen, waarbij hun onderlinge positie veranderd zal zijn.
Een materieel punt verschuift over de verplaatsingsvector $\bar{s}$.
We kunnen twee gevallen onderscheiden:
indien $\bar{s}$ constant is voor het hele lichaam, hebben we te maken met starre lichaam-translatie; indien $\bar{s}$ varieert van plaats tot plaats, is er sprake van deformatie. We kunnen aan de hand van de positie van de punten P_1 en P_2 voor en na deformatie, een analyse geven van dit fenomeen. We beperken ons hierbij tot zeer kleine deformaties.

Vóór deformatie hebben P_1 en P_2 de posities $\bar{r}$ en $\bar{r} + \overline{dr}$.
Na deformatie zijn P_1 en P_2 naar nieuwe posities P_1' en P_2' verschoven: $\bar{r} + \bar{s}(\bar{r})$ resp. $\bar{r} + \overline{dr} + \bar{s}(\bar{r} + \overline{dr})$.



$$\bar{s}(\bar{r} + \overline{dr}) = \bar{s}(\bar{r}) + \overline{ds}(\bar{r})$$

Vergelijking van de onderlinge positie van P_1 en P_2 met die van P_1' en P_2' leert dat $\overline{dr}$ getransformeerd wordt in $\overline{dr} + \overline{ds}$ en derhalve een verandering in richting en lengte ondergaat.
$\overline{ds}(\bar{r})$ is de relatieve verplaatsing van P_1 en P_2.
Hiervoor geldt:

$$\overline{ds}(\bar{r}) = (\overline{dr} \cdot \nabla)\bar{s} \qquad (3.1.1.)$$

.....

rijen en kolommen verwisselen.

ofwel

$$\overline{ds}(\overline{r}) = \begin{pmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_3} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

De $\frac{\partial s_i}{\partial x_j}$ vormen een tensor (toon aan!) die uniek gesplitst kan worden in een symmetrische en een antisymmetrische tensor

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

en
$$ds_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j + \omega_{ij}\, dx_j \qquad (3.1.2.)$$

We zullen zien dat ω_{ij} een starre rotatie van dx_j inhoudt en dat ε_{ij} deformatie van dx_j bewerkstelligt.

3.2. Van de antisymmetrische tensor ω_{ij} kan een vector $\overline{\omega}$ afgeleid worden, zodanig dat de operatie van de tensor op de vector $\overline{dr}$ equivalent is met het uitprodukt $\overline{\omega} \times \overline{dr}$:

$$\omega_{ij}\, dx_j = [\, \overline{\omega} \times \overline{dr}\,]_i$$

Als we dit uitprodukt nader onderzoeken, blijkt dat $\overline{\omega} \times \overline{dr}$ de zuivere rotatie van $\overline{dr}$ voorstelt, waarbij de rotatiehoek onafhankelijk is van de richting van $\overline{dr}$. Alle infinitesimale lijnelementjes $\overline{dr}$ vanuit P_1 draaien over dezelfde hoek. De omgeving van P_1 voert een starre rotatie uit.

De totale verandering van $\overline{dr}$ is samengesteld uit

1. een translatie over $\overline{s}$
2. een rotatie $\omega_{ij} dx_j$
3. een deformatie $\varepsilon_{ij} dx_j$

. . . . .

De translatie en de rotatie zijn onafhankelijk van de richting van $\overline{dr}$ en kunnen beiden opgevat worden als een starre lichaambeweging. In de volgende hoofdstukken zal ons vooral de zuivere deformatie interesseren.

3.3. Meetkundige betekenis van de deformatie-tensor.

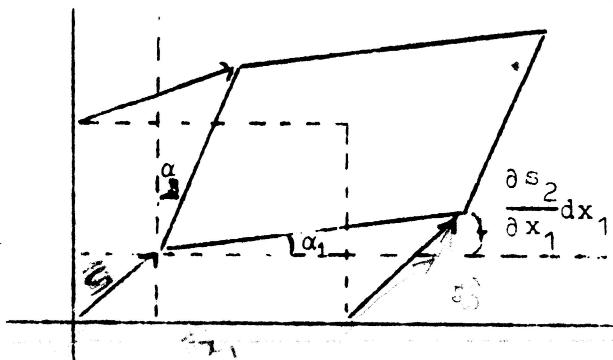
Om de meetkundige betekenis van de elementen van ε_{ij} te onderzoeken, beschouwen we een lijnelement langs de 1-as: $\overline{dr} = (dx_1, 0, 0)$. De lengte van het lijnelement bedraagt na infinitesimale deformatie (met verwaarlozing van hogere orde-termen) : $(1 + \varepsilon_{11})dx_1$

Dus de relatieve lengteverandering (rek) van $(dx_1, 0, 0)$ is:

$$\frac{(1 + \varepsilon_{11})dx_1 - dx_1}{dx_1} = \varepsilon_{11}$$

zodat ε_{11} de relatieve lengteverandering is van een lijnelement, oorspronkelijk langs de 1-as. Een analoge betekenis hebben ε_{22} en ε_{33}.

De deformatie zal behalve rek ook draaiing van dx_1 tot gevolg hebben. De rotatie van dx_1 over een kleine hoek heeft een verwaarloosbaar effect op de lengteverandering.
Om na te gaan wat de betekenis is van de niet-diagonaal elementen, beschouwen we de deformatie van een rechthoek die oorspronkelijk een hoekpunt in de oorsprong heeft.



Opnieuw met verwaarlozing van hogere orde termen, volgt:

$$\alpha_1 = \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial s_1}{\partial x_2}$$

dus $$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$2\,\varepsilon_{12}$ is de hoekverandering van een oorspronkelijk rechte hoek.
Analoog voor de andere elementen ε_{ij}, $i \neq j$.

3.4. Volume-verandering

Een blokvormig volumeëlementje $dV_o = dx_1 dx_2 dx_3$ gaat bij deformatie over in dV.

.....

De relatieve volumeverandering t.g.v. deformatie:

$$\frac{dV - dV_o}{dV_o} = \text{div } \bar{s}$$

$\bar{s}$ is de verplaatsingsvector.

Tevens is $\Theta = \text{div } \bar{s} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ de eerste invariant van de deformatietensor, en dus een scalaire grootheid (zie "Elementen van tensorrekening" van Dr. Hooyman, p. 19).

4. Stroming

4.1. Bij de voorgaande beschrijving van deformatie werd tijdafhankelijkheid niet in beschouwing genomen.
Indien deformatie van tijd afhangt, treedt stroming op van materie. I.p.v. de verplaatsingsvector $\bar{s}$, is nu de snelheid van stroming $\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt}$ relevant.

De stroming is te beschrijven aan de hand van het snelheidsveld $\bar{v}(\bar{r},t)$, waarbij de snelheid $\bar{v}$ een functie is van zowel plaats als tijd: $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$.
De snelheid $\bar{v}$ geeft de snelheid van het deeltje dat zich op $t = t$ juist in $\bar{r} = \bar{r}$ bevindt.
Voor t = constant geeft $\bar{v}$ het stromingsveld in de gehele ruimte. In elk punt van de ruimte kan men dan de snelheidsvector getekend denken. Hierbij ontstaat een stroomlijnenpatroon, waarin $\bar{v}$ in $\bar{r}$ tangentieel is aan de stroomlijn die door $\bar{r}$ gaat.
Voor x_i = constant ($i = 1,2,3$) krijgen we de snelheid van de deeltjes die met toenemende tijd langs het beschouwde punt stromen.

Een te beschouwen deeltje gaat van $\bar{r}$ op t naar $\bar{r} + \Delta\bar{r}$ op $t + \Delta t$.

Algemeen geldt nu dat een grootheid die een eigenschap van de stromende materie beschrijft, b.v. druk, dichtheid en temperatuur, verandert tijdens de stroming van een deeltje van $\bar{r}$ naar $\bar{r} + \Delta\bar{r}$. Deze grootheid is een functie van positie en tijd:

$$F\,(x_1, x_2, x_3, t)$$

De totale afgeleide van F naar de tijd is $\frac{dF}{dt}$
Hiervoor geldt:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \qquad (4.1.1.)$$

ofwel

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\bar{v}.\nabla)F \qquad (4.1.2.)$$

. . . . .

De totale afgeleide naar de tijd bestaat uit een locaal deel, dat een gevolg is van de tijdafhankelijkheid van $\bar{F}$, en een convectief deel t.g.v. de beweging van het deeltje in het momentane veld.
(4.1.1) en (4.1.2) zijn i.h.b. van toepassing op de componenten van de snelheid:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (4.1.3)$$

ofwel in vectornotatie:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}.\nabla)\bar{v}$$

4.2. In een deformeerbaar medium moet, zowel bij stroming als bij statische deformatie, de wet van behoud van massa blijven gelden.

Nu geldt: $\Delta m = \rho \Delta V$

De behoudswet vereist: $\frac{d\Delta m}{dt} = 0$

of, in geval van stroming:

$$\frac{d(\rho\Delta V)}{dt} = 0$$

Hieruit wordt de continuiteitsvergelijking afgeleid:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla.\bar{v} = 0 \qquad (4.2.1)$$

of

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \qquad (4.2.2)$$

4.3. Volgens de tweede wet van Newton is de totale afgeleide naar de tijd (ook wel materiële afgeleide genoemd) van de impuls van een lichaam gelijk aan de resultante van de op het lichaam aangrijpende krachten.
De op het lichaam aangrijpende krachten zijn de volumekrachten $\bar{F}$, waarbij inbegrepen de traagheidskrachten en de tracties $\bar{\sigma}_n$.
Hieruit valt de bewegingsvergelijking voor een willekeurig continuum af te leiden:

$$\frac{\rho dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \qquad (4.3.1)$$

Deze bewegingsvergelijking en de continuiteitsvergelijking vormen de basisvergelijkingen van de continuümmechanica. Elke deformeerbare stof voldoet hieraan. Het specifieke karakter van elke stof wordt gegeven door de relatie tussen spanning en deformatie en hun eventuele afgeleiden. Deze relatie wordt aangegeven door een rheologische functie. In symbolische notatie is deze van de vorm:

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}) = 0$$

Gewoonlijk wordt deze functie lineair verondersteld.

.....

M.b.v. een dergelijke beschrijving van het gedrag van de materie bij deformatie en spanning kunnen we een groot aantal wiskundige modellen opstellen voor deformatie en vloeiing door substitutie van de gevonden relatie in de bewegingsvergelijking.
In het volgende zullen we enkele belangrijke gevallen nader bekijken.

5. Hydrostatica

5.1. In een materie die in hydrostatisch evenwicht verkeert, vindt geen beweging plaats:

$$\frac{d}{dt} = 0$$

Er heerst alzijdige isotrope druk. De spanningstensor heeft de gedaante $\sigma_{ij} = - p\delta_{ij}$

We beschouwen nu de bewegingsvergelijking voor dit speciale geval. Als we aannemen dat de kracht F uit vergelijking (4.3.1) meestal de zwaartekracht voorstelt, die af te leiden is uit een gravitatiepotentiaal U, dan volgt uit (4.3.1)

$$\rho \nabla U + \nabla p = 0 \qquad (5.1.1)$$

Door het inprodukt te nemen met $\overline{dr}$, vinden we hieruit

$$\rho dU + dp = 0 \qquad (5.1.2)$$

Uit (5.1.2) volgt dat op een equipotentiaalvlak van de zwaartekracht ook de druk constant is en tevens dat het oppervlak van een vloeistof waarop de druk één atmosfeer is, een equipotentiaalvlak moet zijn.

Voor twee op infinitesimale afstand van elkaar gelegen equipotentiaalvlakken geldt dat het potentiaalverschil dU en het drukverschil dp constant zijn.

Dan moet $\rho = - \frac{dp}{dU}$ ook constant zijn op een equipotentiaalvlak.

Dus druk en dichtheid zijn functies van U alleen.

Als ρ = constant, kunnen we direkt integreren:

$$\rho U + p = \text{constant}$$

Indien p verandert in één punt van een in evenwicht verkerende onsamendrukbare vloeistof, verandert de druk p overal in dezelfde mate. Dit is het principe van Pascal.

5.2. (1) Barometrische hoogteformule

Om na te gaan hoe de druk zich gedraagt als functie van de hoogte in de atmosfeer, gaan we uit van een vlakke aarde.
De hoogte wordt met positieve z-waarden aangegeven.
z=0 is het aardoppervlak.

. . . . .

Bij aanname van constante dichtheid geldt voor de zwaartekracht

$$-\rho g = \frac{dp}{dz} \qquad (5.2.1)$$

We veronderstellen ter vereenvoudiging dat de temperatuur overal constant is. Hierdoor wordt vermeden dat ρ van de temperatuur afhangt.

Door gebruik te maken van de wet van Boyle en vervolgens te integreren, vinden we:

$$p = p_o \, e^{\frac{\rho_o}{p_o} gz} \qquad (5.2.2)$$

waarbij ρ_o en p_o de waarden van ρ en p aan het aardoppervlak voorstellen.

(2) Centrifuge

We beschouwen een vloeistof die met eenparige snelheid ω in een trommel om een verticale as roteert.
De vloeistof ondervindt invloed van de zwaartekracht en de centrifugaalkracht. Van boven grenst ze aan de lucht met atmosferische druk p_o. In een met de trommel meedraaiend stelsel kan de vloeistof beschouwd worden in hydrostatisch evenwicht te verkeren.
Door zowel de zwaartekracht als de centrifugaalkracht af te leiden uit een potentiaal

$$U = \rho gz - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$$ kunnen we de vergelijking voor het oppervlak van de roterende vloeistof opstellen.
We vinden:

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2 + \text{constante} \qquad (5.2.3)$$

Hierbij zijn ρ en g als constanten opgevat.

(5.2.3) is de vergelijking van een omwentelingsparaboloïde.

(3) Wet van Archimedes

De totale druk op het oppervlak van een ondergedompeld lichaam is

$$-\iint p \, \bar{n} \, dS$$

$\bar{n}$ is de naar buiten gerichte normaal.
We nemen hiervan de verticale component en gebruiken relatie (5.2.1). Hieruit resulteert dat de totale opwaartse druk gelijk is aan ρgV, hetgeen precies het gewicht van de verplaatste vloeistof is.

6. Ideale (wrijvingsloze) vloeistof (Hydrodynamica)

6.1. In een stromende vloeistof kan wrijving optreden die aanleiding geeft tot spanningen σ_{ij}.

.....

Nemen we aan dat wrijving afwezig is, dan heerst alleen de normaaldruk p. De spanningstensor wordt gereduceerd tot $\sigma_{ij} = - p\delta_{ij}$.

We hebben in dit geval te maken met een <u>ideale vloeistof</u>, waarvoor de bewegingsvergelijking is

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i \qquad (6.1.1)$$

Vanzelfsprekend moet bovendien voldaan worden aan de continuïteitsvergelijking (4.2.1).
De traagheidsterm in (6.1.1) is niet lineair, hetgeen het oplossen van de problemen aanzienlijk bemoeilijkt.
Met behulp van een formule uit de vectoranalyse kan echter het convectieve deel van de traagheidsterm als volgt geschreven worden:

$$(\bar{v}.\nabla)\bar{v} = - \bar{v} \times (\nabla \times \bar{v}) + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

(6.1.1) krijgt hierdoor de gedaante

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad}\,(\tfrac{1}{2} v^2) - \bar{v} \times \text{rot}\,\bar{v} = - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\bar{F} \qquad (6.1.2)$$

6.2. (1) We beschouwen nu stationaire stroming: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Als we aannemen dat ρ = constant en $\bar{F}$ af te leiden is van een potentiaal: $\frac{\bar{F}}{\rho} = - \text{grad}\, U$

dan krijgen we:

$$\text{grad}\,(\tfrac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U) = \bar{v} \times \text{rot}\,\bar{v} \qquad (6.2.1)$$

We voeren nu het begrip stroomlijn in. Hieronder verstaan we een stationaire lijn in de vloeistof waaraan de snelheidsvector $\bar{v}$ raakt.
Uit (6.2.1) wordt de <u>vergelijking van Bernouilli</u> afgeleid:

$$\tfrac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{constant langs een stroomlijn.} \qquad (6.2.2)$$

(2) Als de stroming rotatievrij is: rot $\bar{v} = 0$, dan geldt voor elke kromme in de vloeistof:

$$\tfrac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{constant} \qquad (6.2.3)$$

waarbij de constante voor elke kromme dezelfde is, terwijl de waarde van de constante in (6.2.2) voor iedere stroomlijn verschillend kan zijn.

.....

(3) Indien de vloeistof incompressibel is, geldt div $\bar{v} = 0$.
Dit is met behulp van de continuïteitsvergelijking direct in te zien.
Als rot $\bar{v} = 0$, is $\bar{v}$ af te leiden uit een potentiaal: $\bar{v} = \text{grad } \varphi$.
Als nu tegelijkertijd geldt dat div $\bar{v} = 0$, dus als we werken met een incompressibele, rotatievrije vloeistof, dan geldt:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad (6.2.3)$$

Dus: in een incompressibele, rotatievrije vloeistof kan de snelheidsvector $\bar{v}$ afgeleid worden van een potentiaal φ die voldoet aan de vergelijking van Laplace. Een dergelijke stroming heet potentiaalstroming.

6.3. We beschouwen de integraal $I = \oint_C \bar{v} . \overline{dl}$, waarbij C een gesloten contour is in de vloeistof.
We noemen I de circulatie.

Volgens Stokes: $\oint_C \bar{v} . \overline{dl} = \iint_S \text{rot } \bar{v} . dS$

Dus indien rot $\bar{v} = 0$ overal op S, dan is $I = 0$.
We gaan uit van een gesloten contour C op het tijdstip t, en de bijbehorende circulatie.
Door de stroming wordt C meegesleept en vervormd. C gaat over in C' en de waarden van $\bar{v}$ op C veranderen in de waarden $\bar{v}'$ op C'. Als we nagaan hoe dit van de tijd afhangt en $\frac{dI}{dt}$ berekenen, blijkt onder aanname van constante dichtheid:

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

ofwel: I = constant

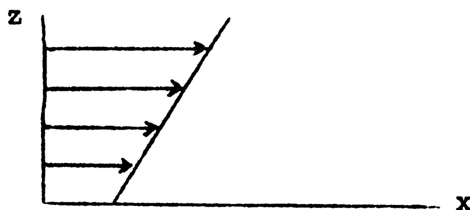
Dit wil zeggen dat in een ideale vloeistof met constante dichtheid de circulatie langs een meestromende gesloten contour constant is. (behoud van ciculatie).

.....

7. Visceuze vloeistoffen

7.1. Stroming met inwendige wrijving

We beschouwen een laminaire stroming, d.w.z. de stroming verloopt in lagen die verschillende parallelle stroomsnelheden hebben.
Verder beperken we ons nu tot vlakke stroming: de stroomsnelheid heeft alleen een x-component, afhankelijk van z:
$\bar{v} = (v(z),\ 0,0)$



Bij een visceuze stroming oefenen de lagen wrijvingskrachten op elkaar uit, evenredig met het snelheidsverschil en een voor de vloeistof karakteristieke constante, de coëfficiënt van interne wrijving η.

Bij een continu snelheidsprofiel $v = v(z)$, zoals dat in werkelijkheid bestaat, is de wrijvingskracht evenredig met de gradiënt $\frac{dv}{dz}$.

De wrijvingskracht per oppervlakte-eenheid is een schuifspanning. Hiervoor geldt de betrekking:

$$\sigma_{xz} = 2\eta \frac{d\varepsilon_{xz}}{dt} = 2\eta\, \dot{\varepsilon}_{xz} \qquad (7.1.1)$$

De interne spanning t.g.v. de wrijving is evenredig met de deformatiesnelheid.
Bij een visceuze vloeistof wordt aangenomen dat de vloeistof aan een vaste begrenzing van de vloeistof blijft plakken, zodat we als randvoorwaarde hebben: $\bar{v} = 0$ aan een vaste begrenzing.

7.2. In het algemeen kunnen we voor een visceuze vloeistof postuleren, dat de optredende, interne spanningen evenredig zijn met de deformatiesnelheid.
Vooral schuifspanningen zullen hierbij optreden.
Omdat de sterkte van een vloeistof nul is, resulteren schuifspanningen in direkte beweging en deformatie.
We nemen aan dat de spanning evenredig is met de deformatiesnelheid.
De spanning σ_{ij} is gelijk aan de som van de gemiddelde hoofdspanning $-p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ en de spanningsdeviator:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}'$$

Aangezien $\sigma_{ii}' = 0$ en $\theta' = 0$ resulteert de spanningsdeviator niet in volumeverandering.

In eerste instantie nemen we aan dat een verandering van p resulteert in een momentane volumeverandering die niet gepaard gaat met wrijving.

. . . . .

De spanningen die t.g.v. vloeistofwrijving ontstaan, zijn dus zuivere schuifspanningen, die geen volumeverandering tot gevolg hebben.
Met gebruikmaking van (7.1.1) kunnen we dan schrijven:

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \qquad (7.2.1)$$

Gaan we er vervolgens toch vanuit dat volumeverandering gepaard gaat met wrijving, dan voegen we een extra term toe, evenredig met de dilatatiesnelheid en met een van η onafhankelijke viscoziteitsconstante ν:

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \nu \operatorname{div} \bar{v}\, \delta_{ij} \qquad (7.2.2)$$

Bij aanname van incompressibiliteit wordt (7.2.2) echter toch weer teruggebracht tot de gedaante van (7.2.1).

Deze laatste uitdrukking (7.2.1) wordt gesubstitueerd in de bewegingsvergelijking van Euler.
Als de uitwendige kracht $\bar{F}$ verwaarloosd wordt en η constant verondersteld wordt voor de gehele vloeistof, levert deze substitutie de Navier-Stokes vergelijking voor stroming van visceuze, incompressibele vleoistoffen bij afwezigheid van een uitwendig krachtveld:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}.\nabla)\bar{v} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \bar{v}$$

$$\text{met } \operatorname{div} \bar{v} = 0 \qquad (7.2.3)$$

7.3. Het bovenstaande passen we nu toe op stationaire stroming in een rechte buis met uniforme cirkeldoorsnede.
De stroming wordt laminair verondersteld.
We kiezen de x-coördinaat langs de as van de cylinder.
Daar de stroming stationair is en de vloeistof incompressibel, krijgt de Navier-Stokes vergelijking de vorm:

$$- \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \bar{v} = 0 \qquad (7.3.1)$$

$\bar{v} = (v_x, 0, 0)$, zodat $p = p(x)$

Stel $v_x = v = v(r)$ $\qquad r = \sqrt{y^2 + z^2}$

We zien nu dat p alleen afhankelijk is van x en $\bar{v}$ alleen van r.
Hierdoor is (7.3.1) eenvoudig op te lossen door integratie.

.....

We mogen stellen: $\frac{\partial p}{\partial x} = - A$

en $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{A}{\eta}$$

De randvoorwaarden zijn $v = 0$ als $r = R$

$\frac{dv}{dr} = 0$ als $r = 0$

$r = R$ is de rand van de buis met straal R.

De oplossing is:

$$v(r) = \frac{A}{4\eta}(R^2 - r^2)$$

Het snelheidsprofiel is parabolisch. De snelheid is maximaal langs de as van de cylinder. Dit type stroming heet Poisseuille stroming.

8. Lineaire elasticiteit

8.1. Voor een elastisch medium geldt dat spanning resulteert in deformatie en dat, na wegvallen van de spanning, de deformatie totaal verdwijnt. M.a.w. er blijft geen permanente vervorming over. We beschouwen een infinitesimale deformatie waarbij volgens de wet van Hooke i.h.a. geldt dat het verband tussen belasting en deformatie lineair is. Een lichaam dat een dergelijk elastisch gedrag vertoont, noemen we een lineair elastisch lichaam ofwel lichaam van Hooke. We nemen aan:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) \qquad \varepsilon_{ij} \ll 1$$

De meest algemene vergelijking voor een lineair verband tussen spanning en deformatie is:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Dit komt overeen met zes vergelijkingen (t.g.v. de symmetrie van de spannings- en deformatietensor), waarin 36 coëfficiënten c_{ijkl} (elasticiteitsconstanten) voorkomen.
Door ons te beperken tot isotrope lineair-elastische media, kunnen we het aantal onafhankelijke elasticiteitsconstanten echter terugbrengen tot twee. Isotropie wil hier zeggen, dat de eigenschappen van het materiaal niet richtingsafhankelijk zijn.
We beschouwen een blokje met ribben langs de hoofdassen van de deformatie. Dit houdt dus in dat $\varepsilon_{ij} = 0$, als $i \neq j$.

. . . . .

Nu geldt bijv.

$$\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33}$$

Vanwege de isotropie en de sýmmetrie kunnen we algemeen schrijven:

$$\sigma_{ii} = (a - b)\varepsilon_{ii} + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

We stellen **nu:** $a - b = 2\mu$

$b = \lambda$

Dit zijn de elastische constanten van Lamé.

Verder geldt: $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \Theta$

Dan geldt bijv. $\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\Theta$

Analoge uitdrukkingen gelden voor σ_{22} en σ_{33}
Hierbij is aangenomen dat de hoofdassen van de deformatie samenvallen met de hoofdassen van de spanning.
We beschouwen de tensor:

$$\sigma_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij} - \lambda\Theta\delta_{ij} = 0$$

Bij assentransformatie blijft deze tensor nul.
Als we deze tensor naar hoofdassen transformeren, krijgen we:

$$\sigma'_{ii} - 2\mu\varepsilon'_{ii} - \lambda\Theta = 0$$

Dit is hierboven afgeleid, dus i.h.a. geldt:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij} \qquad (8.1.1)$$

Hiermee hebben we de betrekking gevonden voor het verband tussen spanning en deformatie in een isotroop, lineair elastisch lichaam.

8.2. De bewegingsvergelijking van Euler

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + F_i$$

krijgt door substitutie van (8.1.1), (4.1.3) en door aanname van constante λ en μ in het medium de gedaante:

$$\rho \cdot \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) v_i \right\} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \qquad (8.2.1)$$

. . . . .

Linearisering van de traagheidsterm levert

$$\frac{dv_i}{dt} \approx \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

verder ook $v_i = \frac{ds_i}{dt} \approx \frac{\partial s_i}{\partial t}$

zodat $\frac{d^2 s_i}{dt^2} \approx \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}$

Hiervan wordt gebruik gemaakt om (8.2.1) te vereenvoudigen.
Als we vervolgens gebruik maken van de uitdrukking (in cartesische coördinaten):

$$\nabla^2 \bar{s} = \text{grad div } \bar{s} - \text{rot rot } \bar{s}$$

Komen we tot de volgende vergelijking in vectornotatie:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{ grad div } \bar{s} - \mu \text{ rot rot } \bar{s} + \bar{F} \qquad (8.2.2)$$

Dit is de vergelijking van de elastodynamica.

Voor statische deformatie is het linkerlid van (8.2.2) gelijk aan nul.

8.3. Elastische constanten

We zullen nu nagaan wat de fysische betekenis is van de elasticiteitsconstanten λ en μ, die specifieke eigenschappen van het elastisch gedrag van een medium beschrijven.
Als uitgangspunt dient de relatie (8.1.1):

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij}$$

(1) Indien $\lambda = \infty$ en $\mu = \infty$ moet gelden $\Theta = 0$ en $\varepsilon_{ij} = 0$.
Dit houdt in dat het lichaam volledig star is en niet vervormbaar bij eindige waarden van σ_{ij}.

(2) Voor schuifspanningen geldt:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (i \neq j)$$

ofwel $\mu = \frac{\sigma_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}$

De schuifmodulus μ is het quotient van aangelegde spanning en resulterende hoekverandering.

. . . . .

Als $\mu = 0$ is vervorming mogelijk zonder spanning.
De stof is in dit geval een vloeistof.
μ wordt ook starheid genoemd.

(3) Indien geen schuifspanningen optreden en de normaalspanningen gelijk zijn, heerst (ook in vaste stof) de hydrostatische toestand: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$.
Met (8.1.1) beschikken we over drie uitdrukkingen voor de normaalspanningen.
Hieruit is af te leiden:

$$p = \frac{-(3\lambda + 2\mu)}{3}\,\Theta \qquad (8.3.1)$$

We definiëren de incompressibiliteit als

$$k = \frac{-p}{\Theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \qquad (8.3.2)$$

In een incompressibel medium is $\Theta = \operatorname{div} \bar{s} = 0$, dus:
$k = +\infty$.
In een vloeistof is $\mu = 0$, dus $k = \lambda$

(4) We beschouwen een infinitesimaal parallellepipedum met ribben langs de assen.
Aangenomen wordt dat de spanningstoestand éénassig is en wel zodanig dat alleen in de 1-richting een normaalspanning werkt. Door optelling van de waarden van de normaalspanningen vinden we, na eliminatie van Θ

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,\varepsilon_{11} \qquad (8.3.3)$$

De grootheid $E = \dfrac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ heet modulus van Young.

Daar $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ geldt $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \dfrac{-\lambda\Theta}{2\mu}$

M.b.v. (8.3.3) kunnen we afleiden dat:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\,\sigma_{11}$$

We voeren nu de dwarscontractiemodulus of Poisson-modulus in:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

.....

Tenslotte drukken we λ, μ en k uit in E en ν

$$\lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Vanwege $k > 0$ en $\mu > 0$ geldt $E > 0$

Indien $\nu = -1$ geldt $\lambda = \mu = \infty$: star lichaam

Indien $\nu = +\frac{1}{2}$ geldt $k = \infty$: incompressibel lichaam

8.4. Elastische golven

We nemen aan dat het medium homogeen is.
De vergelijking voor kleine uitwijkingen in de elastodynamica (elastische golven) wordt gegeven door (8.2.2).

$\bar{F}$ verwaarlozen we in het algemeen daar deze meestal de zwaartekracht voorstelt die slechts een statische deformatie tot gevolg heeft.
Dus:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{ grad div } \bar{s} - \mu \text{ rot rot } \bar{s} \qquad (8.4.1)$$

De verplaatsingsvector $\bar{s}$ kunnen we schrijven als de som van een rotatievrije en divergentievrije vector:

$$\bar{s} = \bar{s}_L + \bar{s}_T \quad \text{met} \quad \text{rot } \bar{s}_L = 0 \text{ en div } \bar{s}_T = 0 \quad (8.4.2)$$

Stel nu $\bar{s}_T = 0$

Substitutie van (8.4.2) in (8.4.1) levert dan:

$$\nabla^2 \bar{s}_L = \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 \bar{s}_L}{\partial t^2} \qquad (8.4.3)$$

met $$v_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad (8.4.3a)$$

Dit is de golfvergelijking voor rotatievrije golven.

. . . . .

Stel vervolgens $\bar{s}_L = 0$

We vinden dan: $$\nabla^2 \bar{s}_T = \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2 \bar{s}_T}{\partial t^2} \qquad (8.4.4)$$

waarbij $$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (8.4.4a)$$

Dit is de golfvergelijking voor divergentievrije golven.
$\bar{s}_L$ en $\bar{s}_T$ voldoen blijkbaar onafhankelijk van elkaar aan golfvergelijkingen met verschillende snelheden.
Dit houdt in dat in een homogeen, onbegrensd medium deze verstoringen zich onafhankelijk van elkaar voortplanten.
$\bar{s}_L$ is een dilatatiegolf ($\text{div}\ \bar{s}_L \neq 0$), die met volumeverandering gepaard gaat. $\bar{s}_T$ is een transversale golf die zich zonder volumeverandering voortplant.
Uit (8.4.3a) en (8.4.4a) volgt: $v_L > v_T$.
Dus longitudinale golven (in de seismologie P-golven genoemd) zijn sneller dan transversale golven (S-golven).
Omdat in een vloeistof $\mu = 0$, kunnen daarin geen transversale golven optreden.

OPGAVEN

1. σ_1, σ_2, σ_3 zijn hoofdspanningen in de hoofdspanningsrichtingen $\bar{n}^{(1)}$, $\bar{n}^{(2)}$ en $\bar{n}^{(3)}$.

   a) Bewijs: $\sigma_{ij} = \sigma_1 n_i^{(1)} n_j^{(1)} + \sigma_2 n_i^{(2)} n_j^{(2)} + \sigma_3 n_i^{(3)} n_j^{(3)}$

   b) Bewijs dat de eenassige spanningstoestand met richting $\bar{n}$ gegeven is door $\sigma_{ij} = S\, n_i n_j$

   c) Beschouw het geval $\sigma_{ij} = S\, n_i n_j$ waarbij $\bar{n}$ een vaste richting is. Echter, $S = S(x,y,z)$ is afhankelijk van positie. Toon aan dat bij afwezigheid van massakrachten de gradient van de intensiteit loodrecht staat op de asrichting.

2. In een punt voldoen de hoofdspanningen aan de relatie $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$. Wat is de richting $\bar{n}$ waarvoor $\sigma_{nn} = \sigma_2$, $\tau = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)$.
   Opmerking: voor de schuifspanning τ geldt: $\tau^2 = |\sigma_n|^2 - \sigma_{nn}^2$

3. In een punt P heerst een vlakke spanningstoestand (d.w.z. een of meer van de hoofdspanningen zijn nul). σ'_{nn}, σ''_{nn} en σ'''_{nn} zijn de normaalspanningen die op drie vlakken door P, die met elkaar hoeken van 120° maken en loodrecht staan op het spanningsvlak, aangrijpen. Bepaal de hoofdspanningen.

4. De spanningstoestand in een punt wordt gegeven door de spanningstensor:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

   a, b, c zijn konstanten.
   Bepaal de konstanten a, b en c zó dat de spanningsvektor op het vlak dat gelijke hoeken maakt met de drie koördinaatvlakken, gelijk aan nul is.

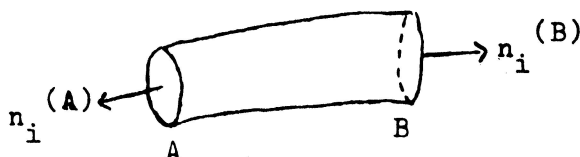
5. De spanningstensor in punt P wordt in het coördinaatstelsel $Ox_1x_2x_3$ gegeven door:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Bepaal de hoofdspanningen en de bijbehorende hoofdspanningsrichtingen voorgesteld door de assen van het stelsel $O x_1^* x_2^* x_3^*$

   b) Bepaal de spanningsdeviator, behorend bij σ_{ij}.

6. Leid de eendimensionale continuiteitsvergelijking af voor stroming van een wrijvingsloze, incompressibele vleoistof door een pijp.



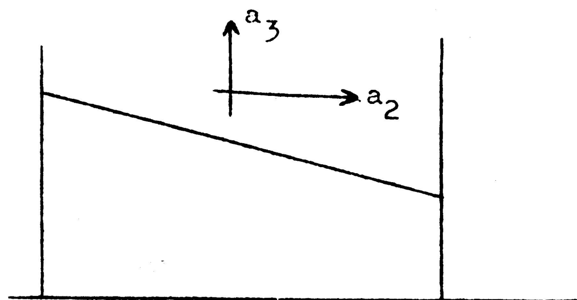
. . . . .

7. Geef een vergelijking voor een spanning in een rechte staaf die aan één eind opgehangen is en gespannen wordt onder zijn eigen gewicht.

8. Een vloeistof is [redacted]compressibel. We nemen aan dat volumeverandering gepaard gaat met wrijving. De stroming is rotatievrij. Druk de continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijking hiervoor uit in termen van de snelheidspotentiaal φ.

9. Een groot vat gevuld met een incompressibele vloeistof wordt constant versneld met $\bar{a} = (0, a_2, a_3)$.

Dit vindt plaats in het zwaartekrachtsveld dat evenwijdig is aan de x_3-richting. Bepaal de helling van het vrije oppervlak van de vloeistof.



10. Bereken het snelheidsprofiel van een laminaire, visceuze, incompressibele stroming tussen twee paralelle vastgehouden vlakke oneindig uitgebreide platen (Analogie met Hagen-Poiseuille stroming).

11. Ga uit van de vergelijking voor elastische golven. Beschouw het geval van een vlakke golf die in de x-richting loopt. Ga na dat s_x aan de golfvergelijking voor longitudinale en s_y en s_z aan die van transversale golven voldoet.

12. Beschouw een infinitesimale kubus met ribben van lengte a evenwijdig aan de hoofdassen van lineair elastisch materiaal. Uitgaande van de onbelaste toestand voeren we de spanning en deformatie op tot waarden σ_1, σ_2, σ_3, ε_1, ε_2, ε_3.

Dit kan uitgedrukt worden door $k\sigma_i$ en $k\varepsilon_i$, waarbij k varieert van 0 tot 1.
Bereken de arbeid per volumeneenheid die verricht wordt door de spanningen aangrijpend op de zijden van de kubus.

<u>Antw.</u>: $W = \frac{1}{2} (\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$

Geef met behulp van de transformatieëigenschap voor tensoren de algemene uitdrukking voor de verrichte arbeid per volume-eenheid.

.....

RANSITORIUM I
IJKSUNIVERSITEIT
TRECHT

Opgaven Continuümmechanica 12/11/1973

1. In een rotatievrije, incompressibele, stationaire tweedimensionale stroming (evenwijdig aan het x_1x_2 vlak) wordt de stroomfunktie $\psi(x_1,x_2)$ gedefinieerd door

$$v_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\psi$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi$$

waarbij $\overline{v} = (v_1,v_2)$ het snelheidsveld representeert.

a) Toon aan dat in een dergelijke stroming de stroomfunktie $\psi(x_1,x_2)$ konstant is langs een stroomlijn.

b) Laat zien dat $\phi = A(x_2^2 - x_1^2)$ voldoet als snelheidspotentiaal (A is een konstante).

c) Bepaal de vergelijkingen van de stroomlijnen die bij de snelheidspotentiaal in b) behoren en laat zien dat ψ inderdaad konstant is langs een stroomlijn.

d) Is het bij de gegeven definitie van ψ noodzakelijk dat de stroming rotatievrij is?

2. Leidt de continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijking af voor een willekeurig kontinuüm.
Geef aan waarom het noodzakelijk is vergelijkingen op te stellen die voor een bepaald medium het verband aangeven tussen de elementen van de spanningstensor en de deformatietensor en eventueel hun afgeleiden (de zg. stof- of constitutie vergelijkingen).
Geef voorbeelden van dit type vergelijkingen.